Министерство образования Иркутской области
Департамент образования города Иркутска
Муниципальное автономное общеобразовательное учреждение
Лицей ИГУ города Иркутска
МАОУ Лицей ИГУ г. Иркутска

РАССМОТРЕНО
на заседании методического
объединения учителей математики
от 29.08.2023г. протокол №1.
Руководитель МО И.Л. Коваленок

УТВЕРЖДЕНО
Приказ № 01-06-140 от
30.08.2023 г.
Директор Е.Ю. Кузьмина

ПРИНЯТО
решением педагогического совета
от 30.08.2023 г., протокол №1

ID -

МУНИЦИПАЛЬНОЕ
АВТОНОМНОЕ
ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ЛИЦЕЙ ИГУ
ГОРОДА ИРКУТСКА

Подписано цифровой подписью: МУНИЦИПАЛЬНОЕ АВТОНОМНОЕ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ЛИЦЕЙ ИГУ ГОРОДА ИРКУТСКА
DN: c=RU, st=ИРКУТСКАЯ ОБЛАСТЬ, street=УЛ. АКАДЕМИКА КУРЧАТОВА Д. 13А, l=Г. ИРКУТСК, title=Директор, o=МУНИЦИПАЛЬНОЕ АВТОНОМНОЕ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ЛИЦЕЙ ИГУ ГОРОДА ИРКУТСКА, 1.2.643.100.1=120D31303533383132303530343031, 1.2.643.100.3=120B3033393439323137353835, 1.2.643.100.4=120A33383132303833333032, 1.2.643.3.131.1.1=120C333831323533313438323439, email=ligu_irk@mail.ru, givenName=Елена Юрьевна, sn=Кузьмина, cn=МУНИЦИПАЛЬНОЕ АВТОНОМНОЕ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ЛИЦЕЙ ИГУ ГОРОДА ИРКУТСКА
Дата: 2023.09.12 20:59:00 +08'00'

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

ОСНОВНОГО ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

ID –

учебного предмета

«Дискретная математика»

10 - 11 классы

Срок реализации программы 2 года

Уровень сложности программы УГЛУБЛЕННЫЙ

Количество часов по программе за весь период реализации - 68 часов

Составители программы: Кузьмин О.В., доктор физ.-мат. наук,
профессор, Заслуженный учитель РФ,
учитель математики МАОУ Лицей ИГУ г. Иркутска;
Кузьмина Е.Ю., канд. физ.-мат. наук,
доцент, Заслуженный работник образования Иркутской области,
учитель математики МАОУ Лицей ИГУ г. Иркутска

г. Иркутск
2023 год

АННОТАЦИЯ К РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЕ
учебного предмета «Дискретная математика»

Рабочая программа «Дискретная математика» (10-11 класс) разработана в соответствии с требованиями ФГОС и ФОП основного общего образования и Положением «О рабочих программах учебных предметов, учебных курсов (в том числе внеурочной деятельности), учебных модулей в соответствии с требованиям ФГОС и ФОП среднего общего образования» МАОУ Лицея ИГУ г.Иркутска,, утвержденного приказом директора 01-06-132 от 30.08.2023 года и является частью основной образовательной программы среднего общего образования.

Рабочая программа ориентирована на целевые приоритеты, сформулированные в федеральной рабочей программе воспитания и в рабочей программе воспитания МАОУ Лицей ИГУ г. Иркутска.

Обучение дискретной математике направлено на совершенствование нравственной и коммуникативной культуры обучающегося, развитие его интеллектуальных и творческих способностей, мышления, памяти и воображения, навыков самостоятельной учебной деятельности, самообразования.

Содержание дискретной математики ориентировано также на развитие функциональной грамотности как интегративного умения человека читать, понимать тексты, использовать информацию текстов разных форматов, оценивать ее, размышлять о ней, чтобы достигать своих целей, расширять свои знания и возможности, участвовать в социальной жизни.

Изучение дискретной математики направлено на достижение следующих целей:

В направлении личностного развития: развитие логического и критического мышления, культуры речи, способностей к умственному эксперименту, интереса к математическому творчеству; формирование качеств, необходимых для адаптации в современном информационном обществе, способностей к преодолению мыслительных стереотипов.

В метапредметном направлении: формирование представлений о дискретной математике как части общечеловеческой культуры, о значимости дискретной математики в развитии цивилизации и современного общества; развитие представлений о дискретной математике как форме описания и методе познания действительности, создание условий для приобретения первоначального опыта математического моделирования.

В предметном направлении: овладение математическими знаниями и умениями, необходимыми для изучения смежных дисциплин и продолжения обучения в профильных классах Лицея ИГУ; создание фундамента для математического развития одаренных детей.

Рабочая программа учебного предмета «Дискретная математика» входит в обязательную предметную область «Математика и информатика»

Срок реализации программы – 2 года (10, 11 класс)

Количество учебный часов, на которые рассчитана программа

	10 класс	11 класс	Всего
Количество учебных недель	34	34	68
Количество часов в неделю	1 ч/нед	1 ч/нед	
Количество часов в год	34	34	68

Для реализации программы используются учебники, допущенные к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования организациями, осуществляющими образовательную деятельность, приказом Минпросвещения от 21.09.2022 № 858:

1) Алгебра: 8 класс: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир. — М.: Вентана-Граф,
2) Теория вероятностей и статистика / Ю. Н. Тюрин, А. А. Макаров, И. Р. Высоцкий, И. В. Ященко. — М.: Издательство «Просвещение»,
3) Кузьмин О. В. Комбинаторные методы решения логических задач: учеб. пособие. – М.: Дрофа,
4) Кузьмин О. В. Перечислительная комбинаторика: учеб. пособие. – М.: Дрофа,

Электронные образовательные ресурсы, допущенные к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования приказом Минпросвещения от 02.08.2022 № 653:

1. http://katalog.iot.ru - каталог образовательных ресурсов сети Интернет;
2. http://www.edu.ru - Федеральный образовательный портал;
3. http://school-collection.edu.ru - единая коллекция цифровых образовательных ресурсов;
4. http://window.edu.ru - единое окно доступа к образовательным ресурсам;
5. Тестирование online: 5 - 11 классы :http://www.kokch.kts.ru/cdo/
6. Педагогическая мастерская, уроки в Интернет и многое другое: http://teacher.fio.ru
7. Новые технологии в образовании: http://edu.secna.ru/main/
8. Путеводитель «В мире науки» для школьников:http://www.uic.ssu.samara.ru/~nauka/
9. Мегаэнциклопедия Кирилла и Мефодия: http://mega.km.ru
10. сайты «Энциклопедий», например:http://www.rubricon.ru/ http://www.encyclopedia.ru/

В программу включены содержание, планируемые результаты (личностные, метапредметные, предметные), тематическое планирование с учетом рабочей программы воспитания и возможностью использования электронных (цифровых) образовательных ресурсов, оценочные и методические материалы.

Рабочая программа рассмотрена на заседании методического объединения учителей-предметников (протокол №1 от 29.08.2023 г.), согласована с заместителем директора МАОУ Лицей ИГУ г. Иркутска, утверждена приказом директора № 01-06-140 от 30.08.2023 г.

Содержание программы по курсу
«Дискретная математика» в 10-11 классах.

10 классы

I. Элементы перечислительной комбинаторики (8 часов).

Основные правила комбинаторики.

Соединения. Подмножества конечных множеств. Соотношения для числа сочетаний, размещений и перестановок без повторений.

Подмножества конечных мультимножеств. Соотношения для числа сочетаний, размещений и перестановок с повторениями. Разбиения и число разбиений.

II. Элементы теории вероятностей и статистики (27 часов).

Стохастическое восприятие мира. Предмет теории вероятностей и математической статистики. Случайные эксперименты. Понятие стохастической модели.

События и их вероятности. Случайные события и операции над ними. Алгебра событий.

Классическое определение вероятности. Применение комбинаторики к подсчету вероятности. Геометрическое определение вероятности. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Условные вероятности. Независимость случайных величин. Формулы полной вероятности и Байеса.

Испытания Бернулли. Формула Бернулли.

Случайные величины. Дискретные случайные величины и законы их распределения. Многоугольник распределения. Понятие непрерывной случайной величины.

Числовые характеристики случайных величин. Понятие моментов случайных величин. Основные свойства математического ожидания и дисперсии.

Неравенство Чебышева и закон больших чисел. Теоремы Чебышёва и Бернулли.

Основные понятия математической статистики. Выборка. Статистические характеристики выборки. Среднее значение, мода, медиана и размах выборки.

11 классы

I. Комбинаторика и арифметика целых чисел (26 часов).

Отношение делимости. Признаки делимости. Десятичная запись числа.

Свойства делимости. Разложение на множители. Простые и составные числа. Деление с остатком. Арифметика остатков. Делители числа. Взаимно-простые числа.

НОД и НОК. Алгоритм Евклида. Основная теорема арифметики.

Уравнения в целых числах. Линейные диофантовы уравнения. Диофантовы уравнения второго и более высокого порядка. Рациональные уравнения. Иррациональные уравнения. Показательные уравнения. Уравнения в простых числах. Уравнения смешанного типа. Уравнения с целой и дробной частями числа.

Неравенства в целых числах. Организация перебора. Применение метода математической индукции. Использование области определения. Использование монотонности. Использование ограниченности. Использование графических иллюстраций.

Неравенства и оценки в задачах теории чисел. Среднее арифметическое. Неравенство о средних.

Последовательности и ряды. Суммы и произведения. Рекуррентные соотношения. Прогрессии. Инварианты.

Текстовые задачи.

II. Элементы теории вероятностей (8 часов).

Классическое определение вероятности. Применение комбинаторики к подсчету вероятностей случайных событий.

Теоремы сложения и умножения вероятностей.

Условные вероятности. Формулы полной вероятности и Байеса.

Последовательные испытания. Схема Бернулли. Формула Бернулли.

Тематическое планирование

10 классы

Номер урока	Наименование разделов и тем уроков	Кол-во часов	Контроль
	Элементы перечислительной комбинаторики	**8**	
1	Основные правила комбинаторики. Соединения.	1	
2	Подмножества конечных множеств. Соотношения для числа сочетаний без повторений.	1	
3	Соотношения для числа размещений и перестановок без повторений.	1	
4	Подмножества конечных мультимножеств. Соотношения для числа сочетаний с повторениями.	1	
5	Соотношения для числа размещений и перестановок с повторениями и разбиений.	1	
6	Решение задач по теме «Соединения»	1	
7	Контрольная работа № 1. Соединения.		1
8	Решение задач по теме «Соединения»	1	
	Элементы теории вероятностей и статистики	**26**	
9	Стохастическое восприятие мира. Предмет теории вероятностей и математической статистики. Случайные эксперименты. Понятие стохастической модели.	1	
10	События и их вероятности. Случайные события и операции над ними. Алгебра событий.	1	
11	Классическое определение вероятности. Применение комбинаторики к подсчету вероятности.	1	
12	Геометрическое определение вероятности. Теоремы сложения и умножения вероятностей.	1	
13	Условные вероятности. Независимость случайных величин.	1	
14	Формулы полной вероятности и Байеса.	1	
15	Испытания Бернулли. Формула Бернулли.	1	
16	Решение задач по теме «Случайные события»	1	
17	Контрольная работа № 2. Случайные события.		1
18	Решение задач по теме «Случайные события»	1	
19	Случайные величины. Дискретные случайные величины и законы их распределения.	1	
20	Многоугольник распределения.	1	
21	Понятие непрерывной случайной величины.	1	
22	Числовые характеристики случайных величин.	1	
23	Математическое ожидание и его основные свойства.	1	

24	Дисперсия. Основные свойства дисперсии	1	
25	Понятие моментов случайных величин.	1	
26, 27	Неравенство Чебышёва.	2	
28	Закон больших чисел. Теорема Чебышёва.	1	
29	Теорема Бернулли.	1	
30	Контрольная работа № 3. Случайные величины		1
31	Решение задач по теме «Случайные величины»	1	
32	Основные понятия математической статистики. Выборка. Статистические характеристики выборки.	1	
33	Среднее значение, мода, медиана и размах выборки.	1	
34, 35	Решение задач ЕГЭ.	2	

11 классы

Номер урока	Наименование разделов и тем уроков	Кол-во часов	Контроль
	Комбинаторика и арифметика целых чисел	**26**	
1	Отношение делимости. Признаки делимости. Десятичная запись числа.	1	
2	Свойства делимости. Разложение на множители. Простые и составные числа.	1	
3	Деление с остатком. Арифметика остатков. Делители числа. Взаимно-простые числа.	1	
4	НОД и НОК. Алгоритм Евклида.	1	
5	Основная теорема арифметики.	1	
6	Уравнения в целых числах. Линейные диофантовы уравнения.	1	
7	Диофантовы уравнения второго и более высокого порядка.	1	
8	Контрольная работа № 1. Делимость.		1
9	Решение задач по теме «Делимость»	1	
10	Рациональные и иррациональные уравнения	1	
11	Показательные уравнения. Уравнения в простых числах.	1	
12	Уравнения смешанного типа.	1	
13	Уравнения с целой и дробной частями числа.	1	
14	Неравенства в целых числах. Организация перебора. Применение метода математической индукции.	1	
15	Использование области определения и монотонности.	1	
16	Ограниченность. Графические методы.	1	
17	Неравенства и оценки в задачах теории чисел.	1	
18	Среднее арифметическое. Неравенство о средних.	1	
19	Последовательности и ряды.	1	
20	Суммы и произведения.	1	
21	Рекуррентные соотношения.	1	
22	Прогрессии.	1	
23	Инварианты.	1	

24	Текстовые задачи.	1	
25	Контрольная работа № 2. Решение задачи 19 ЕГЭ		1
26	Решение задач по теме «Задача 19 ЕГЭ»	1	
	Элементы теории вероятностей	**8**	
27	Применение комбинаторики к подсчету вероятностей случайных событий	1	
28	Теоремы сложения и умножения вероятностей.	1	
29	Условные вероятности. Формула полной вероятности.	1	
30	Формула Байеса.	1	
31	Последовательные испытания. Формула Бернулли.	1	
32	Решение задач по теме «Вероятности случайных событий»	1	
33	Контрольная работа № 3. Вероятности случайных событий		1
34	Решение задач по теме «Вероятности случайных событий»	1	

Планируемые результаты

Личностные результаты освоения программы по математике характеризуются в части:

1) патриотического воспитания:

проявлением интереса к прошлому и настоящему российской математики, ценностным отношением к достижениям российских математиков и российской математической школы, к использованию этих достижений в других науках и прикладных сферах;

2) гражданского и духовно-нравственного воспитания:

готовностью к выполнению обязанностей гражданина и реализации его прав, представлением о математических основах функционирования различных структур, явлений, процедур гражданского общества (например, выборы, опросы), готовностью к обсуждению этических проблем, связанных с практическим применением достижений науки, осознанием важности морально-этических принципов в деятельности учёного;

3) трудового воспитания:

установкой на активное участие в решении практических задач математической направленности, осознанием важности математического образования на протяжении всей жизни для успешной профессиональной деятельности и развитием необходимых умений, осознанным выбором и построением индивидуальной траектории образования и жизненных планов с учётом личных интересов и общественных потребностей;

4) эстетического воспитания:

способностью к эмоциональному и эстетическому восприятию математических объектов, задач, решений, рассуждений, умению видеть математические закономерности в искусстве;

5) ценностей научного познания:

ориентацией в деятельности на современную систему научных представлений об основных закономерностях развития человека, природы и общества, пониманием математической науки как сферы человеческой деятельности, этапов её развития и значимости для развития цивилизации, овладением языком математики и математической культурой как средством познания мира, овладением навыками исследовательской деятельности;

6) физического воспитания, формирования культуры здоровья и эмоционального благополучия:

готовностью применять математические знания в интересах своего здоровья, ведения здорового образа жизни (здоровое питание, сбалансированный режим занятий и отдыха, регулярная физическая активность), сформированностью навыка рефлексии, признанием своего права на ошибку и такого же права другого человека;

7) экологического воспитания:

ориентацией на применение математических знаний для решения задач в области сохранности окружающей среды, планирования поступков и оценки их возможных последствий для окружающей среды, осознанием глобального характера экологических проблем и путей их решения;

8) адаптации к изменяющимся условиям социальной и природной среды:

готовностью к действиям в условиях неопределённости, повышению уровня своей компетентности через практическую деятельность, в том числе умение учиться у других людей, приобретать в совместной деятельности новые знания, навыки и компетенции из опыта других;

необходимостью в формировании новых знаний, формулировать идеи, понятия, гипотезы об объектах и явлениях, в том числе ранее неизвестных, осознавать дефициты собственных знаний и компетентностей, планировать своё развитие;

способностью осознавать стрессовую ситуацию, воспринимать стрессовую ситуацию как вызов, требующий контрмер, корректировать принимаемые решения и действия, формулировать и оценивать риски и последствия, формировать опыт.

10 класс

Личностные результаты

– ориентация обучающихся на инициативность, креативность, готовность и способность к личностному самоопределению, способность ставить цели и строить жизненные планы;

– развитие компетенций сотрудничества со сверстниками, взрослыми в образовательной, учебно-исследовательской, проектной и других видах деятельности.

– готовность и способность к образованию, в том числе самообразованию, на протяжении всей жизни; сознательное отношение к непрерывному образованию как условию успешной профессиональной и общественной деятельности.

Метапредметные результаты

Регулятивные универсальные учебные действия

Ученик научится:

– ставить и формулировать собственные задачи в образовательной деятельности и жизненных ситуациях;

– оценивать ресурсы, в том числе время и другие нематериальные ресурсы, необходимые для достижения поставленной цели;

– организовывать эффективный поиск ресурсов, необходимых для достижения поставленной цели;

– сопоставлять полученный результат деятельности с поставленной заранее целью.

Познавательные универсальные учебные действия

Ученик научится:

– находить и приводить критические аргументы в отношении действий и суждений другого; спокойно и разумно относиться к критическим замечаниям в отношении собственного суждения, рассматривать их как ресурс собственного развития;

– выходить за рамки учебного предмета и осуществлять целенаправленный поиск возможностей для широкого переноса средств и способов действия;

– выстраивать индивидуальную образовательную траекторию, учитывая ограничения со стороны других участников и ресурсные ограничения;

– менять и удерживать разные позиции в познавательной деятельности.

Коммуникативные универсальные учебные действия

Ученик научится:

– осуществлять деловую коммуникацию как со сверстниками, так и со взрослыми (как внутри образовательной организации, так и за ее пределами), подбирать партнеров для деловой коммуникации исходя из соображений результативности взаимодействия, а не личных симпатий;

– развернуто, логично и точно излагать свою точку зрения с использованием адекватных (устных и письменных) языковых средств;

– выстраивать деловую и образовательную коммуникацию, избегая личностных оценочных суждений.

Предметные результаты:

Ученик научится:

- владеть комбинаторно-логическими и стохастическими понятиями при решении задач и проведении математических рассуждений;
- самостоятельно формулировать определения комбинаторных конфигураций, выдвигать гипотезы о новых свойствах и признаках комбинаторных конфигураций в и обосновывать или опровергать их, обобщать или конкретизировать результаты на новых классах комбинаторных объектов, проводить в несложных случаях классификацию комбинаторных объектов по различным основаниям;
- исследовать чертежи и схемы, включая визуальные представления графов, извлекать, интерпретировать и преобразовывать информацию, представленную на чертежах и схемах;
- решать задачи комбинаторно-логического содержания, в том числе в ситуациях, когда алгоритм решения не следует явно из условия, выполнять необходимые для решения задачи дополнительные рассуждения, исследовать возможность применения теорем и формул комбинаторики и теории вероятностей для решения задач;
- уметь формулировать и доказывать комбинаторно-логические утверждения;
- применять вероятностные и статистические методы при решении задач

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

- составлять с использованием вероятностных и статистических характеристик математические модели для решения задач практического характера и задач из смежных дисциплин, исследовать полученные модели и интерпретировать результат.

Учащиеся получат возможность научиться:

- свободно оперировать вероятностными и статистическими понятиями при решении задач и проведении математических рассуждений;
- выдвигать гипотезы о новых свойствах и признаках комбинаторных конфигураций и обосновывать или опровергать их, обобщать или конкретизировать результаты на новые классы конфигураций.

11 класс

Личностные результаты

– ориентация обучающихся на достижение личного счастья, реализацию позитивных жизненных перспектив, инициативность, креативность, готовность и способность к личностному самоопределению, способность ставить цели и строить жизненные планы;

– развитие компетенций сотрудничества со сверстниками, детьми младшего возраста, взрослыми в образовательной, учебно-исследовательской, проектной и других видах деятельности.

– готовность и способность к образованию, в том числе самообразованию, на протяжении всей жизни; сознательное отношение к непрерывному образованию как условию успешной профессиональной и общественной деятельности;

– осознанный выбор будущей профессии как путь и способ реализации собственных жизненных планов;

Метапредметные результаты

Регулятивные универсальные учебные действия

Выпускник научится:

– самостоятельно определять цели, задавать параметры и критерии, по которым можно определить, что цель достигнута;

– ставить и формулировать собственные задачи в образовательной деятельности и жизненных ситуациях;
– оценивать ресурсы, в том числе время и другие нематериальные ресурсы, необходимые для достижения поставленной цели;
– выбирать путь достижения цели, планировать решение поставленных задач, оптимизируя материальные и нематериальные затраты;
– организовывать эффективный поиск ресурсов, необходимых для достижения поставленной цели;
– сопоставлять полученный результат деятельности с поставленной заранее целью.

Познавательные универсальные учебные действия

Выпускник научится:
– искать и находить обобщенные способы решения задач, в том числе, осуществлять развернутый информационный поиск и ставить на его основе новые (учебные и познавательные) задачи;
– критически оценивать и интерпретировать информацию с разных позиций, распознавать и фиксировать противоречия в информационных источниках;
– использовать различные модельно-схематические средства для представления существенных связей и отношений, а также противоречий, выявленных в информационных источниках;
– находить и приводить критические аргументы в отношении действий и суждений другого; спокойно и разумно относиться к критическим замечаниям в отношении собственного суждения, рассматривать их как ресурс собственного развития;
– выходить за рамки учебного предмета и осуществлять целенаправленный поиск возможностей для широкого переноса средств и способов действия;
– выстраивать индивидуальную образовательную траекторию, учитывая ограничения со стороны других участников и ресурсные ограничения;
– менять и удерживать разные позиции в познавательной деятельности.

Коммуникативные универсальные учебные действия

Выпускник научится:
– осуществлять деловую коммуникацию как со сверстниками, так и со взрослыми (как внутри образовательной организации, так и за ее пределами), подбирать партнеров для деловой коммуникации исходя из соображений результативности взаимодействия, а не личных симпатий;
– при осуществлении групповой работы быть как руководителем, так и членом команды в разных ролях (генератор идей, критик, исполнитель, выступающий, эксперт и т.д.);
– координировать и выполнять работу в условиях реального, виртуального и комбинированного взаимодействия;
– развернуто, логично и точно излагать свою точку зрения с использованием адекватных (устных и письменных) языковых средств;
– распознавать конфликтогенные ситуации и предотвращать конфликты до их активной фазы, выстраивать деловую и образовательную коммуникацию, избегая личностных оценочных суждений.

Предметные результаты:

Выпускник научится:
- владеть комбинаторно-логическими и стохастическими понятиями при решении задач и проведении математических рассуждений;
- самостоятельно формулировать определения комбинаторных конфигураций, выдвигать гипотезы о новых свойствах и признаках комбинаторных конфигураций и обосновывать или опровергать их, обобщать или конкретизировать результаты на новых классах комбинаторных объектов, проводить в несложных случаях классификацию комбинаторных объектов по различным основаниям;
- исследовать чертежи и схемы, включая визуальные представления графов, извлекать, интерпретировать и преобразовывать информацию, представленную на чертежах и схемах;
- решать задачи комбинаторно-логического содержания, в том числе в ситуациях, когда алгоритм решения не следует явно из условия, выполнять необходимые для решения задачи дополнительные построения, исследовать возможность применения теорем и формул комбинаторики и теории вероятностей для решения задач;

– уметь формулировать и доказывать комбинаторно-логические утверждения;
– применять вероятностные и статистические методы при решении задач.

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

составлять с использованием вероятностных и статистических математические модели для решения задач практического характера и задач из смежных дисциплин, исследовать полученные модели и интерпретировать результат.

Выпускник получит возможность научиться:

– свободно оперировать вероятностными и статистическими понятиями при решении задач и проведении математических рассуждений;
– выдвигать гипотезы о новых свойствах и признаках комбинаторных конфигураций и обосновывать или опровергать их, обобщать или конкретизировать результаты на новые классы конфигураций.

Критерии и нормы оценки знаний, умений, навыков обучающихся применительно к различным формам контроля знаний

Контроль знаний, умений и навыков учащихся является важной составной частью процесса обучения. Целью контроля является определение качества усвоения учащимися программного материала, диагностирование и корректирование их знаний и умений, воспитание ответственности к учебной работе. Для выяснения роли контроля в процессе обучения математике рассматривают его наиболее значимые функции: обучающую, диагностическую, прогностическую, развивающую, ориентирующую и воспитывающую.

Основные виды контроля по математике это: **контрольная работа** (проводится по окончании каждой темы и полугодия), **самостоятельная работа** (текущий контроль), **тестирование** (письменное или компьютерное, проводится, в основном в выпускном классе), **устный экзамен** или **комбинированный**(проводится в конце 10 класса).

Нормы оценки знаний, умений и навыков учащихся по математике

1. *Оценка устных ответов учащихся*

Ответ оценивается отметкой «**5**», если ученик:

- полно раскрыл содержание материала в объёме», предусмотренном программой учебников;
- изложил материал грамотным языком а определённой логической последовательности, точно используя математическую терминологию и символику;
- правильно выполнил рисунки, чертежи, графика, сопутствующие ответу;
- показал умение иллюстрировать теоретические положения конкретными примерами» применять их в новой: ситуации при выполнении практическою задания;
- продемонстрировал усвоение ранее изученных сопутствующих вопросов, сформированность и устойчивость используемых при ответе навыков и умений;
- отвечал самостоятельно без наводящих вопросов учителя.
- возможны одна - две неточности при освещении второстепенных вопросов или в выкладках, которые ученик легко исправил по замечанию учителя.

Ответ оценивается отметкой «**4**», если он удовлетворяет в основном требованиям на оценку «5», но при этом имеет один из недостатков:

- в изложении допущены небольшие пробелы, не исказившие математическое содержание ответа;
- допущены один - два недочета при освещении основною содержания ответа, исправленные по замечанию учителя;
- допущены ошибка или более двух недочётов при освещении второстепенных вопросов или в выкладках, легко исправленные по замечанию учителя.

Отметка «**3**» ставится в следующих случаях:

- неполно или непоследовательно раскрыто содержание материала, но показано общее понимание вопроса и продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения программного материала (определённые «Требованиями к математической подготовке учащихся»);

- имелись затруднения или допущены ошибки в определении понятие, использовании математической терминологии, чертежах, выкладках, исправленные после нескольких наводящих вопросов учителя;
- ученик не справился с применением теории в новой ситуации при выполнении практического задания, но выполнил задания обязательного уровня сложности по данной теме;
- при знании теоретического материала выявлена недостаточная сформированность основных умении и навыков».

<u>Отметка "**2**" ставится в следующих случаях:</u>

- не раскрыто основное содержание учебного материала;
- обнаружено незнание или непонимание учеником большей или наиболее важное части учебного материала;
- допущены ошибки в определении понятий» при использовании математической терминологии, в рисунках, чертежах или графиках, в выкладках, которые не исправлены после нескольких наводящих вопросов учителя.

<u>Отметка «**1**» ставится, если:</u>

- ученик обнаружил полное незнание и непонимание изучаемого учебного материала или не смог ответить ни на один из поставленных вопросов по изучаемому материалу.

2. *Оценка письменных контрольных работ учащихся*

<u>Отметка «**5**» ставится, если:</u>

- работа выполнена полностью;
- в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок;
- в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием незнания или непонимания учебного материала).

<u>Отметка «**4**» ставится, если:</u>

- работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки);
- допущена одна ошибка или два-три недочёта в выкладках, рисунках, чертежах или графиках (если эти виды работы не являлись специальным объектом проверки).

<u>Отметка «**3**» ставится, если:</u>

- допущены более одной ошибки или более двух-трёх недочётов в выкладках, чертежах или графиках, но учащийся владеет обязательными умениями по проверяемой теме;

<u>Отметка «**2**» ставится, если:</u>

- допущены существенные ошибки, показавшие, что учащийся не владеет обязательные умениями по данной теме в полной мере;

<u>Отметка «**1**» ставится, если:</u>

работа показала полное отсутствие у учащегося обязательных знаний и умений по проверяемой теме или значительная часть работы выполнена не самостоятельно

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Оценочные материалы

10 класс

Контрольная работа № 1

1. Состоялся шахматный турнир, в котором приняли участие несколько шахматистов, причем каждый из них сыграл с остальными по одной партии. Всего состоялось 45 партий. Сколько было шахматистов?
2. В кондитерской имеется 5 видов пирожных. Сколько различных наборов по 4 пирожных можно составить? (Наборы, отличающиеся лишь расположением пирожных, считаются одинаковыми.)
3. Сколькими способами можно переставлять буквы слова «логарифм» так, чтобы четные места были заняты согласными буквами?

Контрольная работа № 2

1. Геометрическое определение вероятности. Условные вероятности. Формула Бернулли.
2. В ящике имеется 9 белых и 6 черных шаров. Наудачу вынимают 3 шара. Какой состав шаров по цвету наиболее вероятно извлечь?
3. В шар вписана правильная треугольная пирамида. Точка наудачу зафиксирована в шаре. Найти вероятность того, что точка попадет в пирамиду.

11 класс

Самостоятельная работа

1. Делится ли число 3145677891 на 11?
2. Какую цифру можно поставить вместо звездочки, если известно, что число 314159*6 кратно 8? (Перечислите все возможные варианты.)
3. Найдите последнюю цифру числа 13^{2013}.
4. При делении числа 518 с остатком получилось неполное частное 172. Найдите все возможные значения делителя и остатка.

Контрольная работа № 1

1. В буфете купили несколько пирожных по 35 рублей и 14 порций кофе (каждая порция кофе стоит целое число рублей). Мог ли весь купленный товар стоить 501 рубль?
2. Число a даёт при делении на 8 остаток 5. Число b при делении на 16 даёт остаток 11. Найдите остаток от деления $a + b$ на 8.
3. Могут ли две последние цифры десятичной записи квадрата натурального числа быть нечётными?
4. Найдите наименьшее общее кратное чисел 2011! и 2009! + 2010!

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

10 класс

1. Применение комбинаторики к подсчёту вероятностей

Многие задачи на подсчёт вероятностей можно свести к так называемой схеме случайного выбора. Здесь, мы рассматриваем два основных варианта этой схемы: *выбор с возвращением* и *выбор без возвращения*.

1. Выбор с возвращением. Пусть $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$- некоторое множество элементов. Представим себе, в некотором ящике собрано n различных предметов, которые обозначены элементами $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Из ящика наугад извлекается один из предметов, регистрируется, затем возвращается обратно в ящик. Если осуществить m раз таких действий, то получим некоторую *строку* длиною m, составленную из элементов множества $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Полученная строка называется *выборкой объёма* m из множества M. Количество различных выборок объёма m в соответствии с правилом произведения рано n^m.

Описанную процедуру принято называть «случайным выбором с возвращением». Здесь, слово «случайный» означает нечто большее, нежели просто тот факт, что состав выборки заранее предсказать невозможно. Мы условимся вкладывать в это слово следующий смысл: *все* n^m *выборок равновероятны*. Другими словами, вероятность появления любой конкретной выборки (как случайное событие) равна

$$P(A) = \frac{1}{n^m}.$$

К схеме случайного выбора можно свести большое количество опытов (испытаний). Например, подбрасывание монеты можно интерпретировать как случайный выбор одного элемента из двухэлементного множества $X = \{$*герб*, *цифра*$\}$. Вместо двукратного бросания игральной кости можно рассматривать случайный выбор с возвращением двух элементов из множества $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Выяснение дней рождения m случайных прохожих можно заменить случайным выбором с возвращением m элементов из множества $X = \{1, 2, 3, \ldots, 356\}$ и так далее.

2. Выбор без возвращения. В этом случае выбранный предмет из ящика не возвращается обратно в ящик, и следующее извлечение производится из оставшегося числа (меньшего числа) предметов. После m раз извлечений получаем строку длиною m без повторений. Количество таких строк, равно

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-(m-1)) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Случайный характер выбора строки понимается, как и выше, в том смысле, что все выборки данной длины (как случайное событие) имеют одну и ту же вероятность равную

$$P(A) = \frac{1}{A_n^m} = \frac{(n-m)!}{n!}.$$

Пример 1. Пусть из совокупности n предметов извлекаются с возвращением m предметов. Найти вероятность того, что все предметы, составляющие выборку (событие А), окажутся различными.

Решение. В данном случае количество всех элементарных исходов опыта равно n^m, а число исходов, благоприятных для события *A* равно A_n^m. Следовательно,

$$P(A)=\frac{A_n^m}{n^m}=\prod_{k=1}^{m-1}(1-\frac{k}{n}). \qquad (1)$$

Пример 2. (*Задача о днях рождения*). В некотором месте (например, в каком-нибудь театре, в студенческой аудитории и т.д.) случайно собралось m человек. Какова вероятность того, что, хотя бы у двух из них совпадают дни рождения?

Решение. Как уже было отмечено (см. пункт 1.) выяснения дней рождения у m случайно собравшихся лиц можно заменить случайным выбором с возвращением m элементов из множества $X = \{1, 2, 3, \ldots, 356\}$. Нам необходимо найти вероятность события B – совпадения дней рождения у каких-либо двух лиц собравшихся. Здесь, удобно воспользоваться равенством $P(B)=1-P(\overline{B})$, где $\overline{B}$ - противоположное событие к событию B, заключающее в том, что в том, что все дни рождения различны. По формуле (1) для $n = 365$ получим:

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\prod_{k=1}^{m-1}(1-\frac{k}{365})=1-\frac{365\cdot 364\cdots(365-(m-1))}{365^m}. \qquad (2)$$

Найденная формула естественно, является функцией натурального аргумента m - число собравшихся людей в указанном месте. Подсчитаем для нескольких значений m:

m	5	10	22	23	30	60
$P(B)$	0,027	0,117	0,476	0,507	0,706	0,994

Расчеты проведены до третьего знака после запятой. Из таблицы видно, что если число собравшихся всего лишь 23 человека, то уже и тогда имеется более 50% шансов на то, что по крайней мере, у двоих из них дни рождения совпадут!

Пример 3. Игральную кость подбрасывают 10 раз. Какова вероятность того, что при этом грани 1, 2, 3, 4, 5, 6 выпадут соответственно 2, 3, 1, 1, 1, 2 раза (событие *A*)?

Решение. Число всех строк длиною 10 из элементов множества $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ равно 6^{10}. Благоприятными случаями для события *A* будут строки, в которых элементы 1, 2, 3, 4, 5, 6 встречаются соответственно 2, 3, 1, 1, 1. 2 раза, т.е. строки, имеющие состав (2, 3, 1, 1, 1, 2).

Количество таких строк равно:

$$\frac{(2+3+1+1+1+2)!}{2!\,3!\,1!\,1!\,1!\,2!}=\frac{10!}{24}=2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10.$$

Следовательно,

$$P(A)=\frac{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{6^{10}}=\frac{700}{6^7}=0{,}002\cdots.$$

Пример 4. Слово «карета», составленное из шести «букв – кубиков», рассыпалось на отдельные буквы, которые затем собраны и положены в коробку. Из коробки наугад извлекают буквы одну за другой и расставляют их друг за другом (слева на право). Какова вероятность получения при таком действии слово «ракета»?

Решение. В этом примере отсутствует схема случайного выбора в прежнем понимании, так как буквы, сложенные в коробке, не все различны (две одинаковых буквы «а»). Представим себе, что одинаковые буквы (в данном случае «а, а») индивидуализированны с помощью знаков 1, 2 (превратились в a_1 , a_2). Тогда число всевозможных выборок без возвращения будет $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6!$. Среди них благоприятными для слова «ракета» будет 2! выборок (число перестановок букв a_1 , a_2).

Следовательно,

$$P(A) = \frac{2!}{6!} = \frac{2}{720} = \frac{1}{360} \approx 0{,}00278.$$

Если исходную задачу решить непосредственно по смыслу, например, для случая слово «ракета», то достаточно ограничиться перестановками трёх первых букв. Число перестановок всего будет 3! = 6. Таким образом, вероятность достижения цели будет равна 1/6. Этот пример показывает, что наши умственные (наглядные) возможности повышают наш «шанс» для решения задач.

2. Задачи по теме «Подмножества конечных множеств. Сочетания»

1. В классе 40% мальчиков. Математический кружок посещают 40% учеников, при этом 40% участников математического кружка составляют девочки. Какая часть мальчиков посещает математический кружок?
2. Учитель задал на уроке замысловатую задачу. В результате количество мальчиков, решивших эту задачу, оказалось равным числу девочек, ее не решивших. Кого в классе больше – решивших задачу или девочек?
3. 25 лицеистов, встретившись перед уроком дискретной математики, обменялись рукопожатиями. Сколько всего было сделано рукопожатий?
4. Сколько диагоналей имеется в выпуклом n-угольнике?
5. На плоскости даны n точек, никакие три из которых не расположены на одной прямой; сколько имеется треугольников с вершинами в этих точках?
6. На собеседовании предлагается тест из 10 вопросов. Известно, что на половину из них следует ответить «да», а на вторую половину – «нет». Сколькими способами можно ответить на вопросы теста при данном условии?
7. В турнире по игре в «крестики-нолики» на первенство Лицея ИГУ Ваня С. и Сережа И. сыграли одинаковое количество партий, заболели и выбыли из турнира. Остальные участники доиграли турнир до конца. Всего было сыграно 28 партий. Играли ли Ваня и Сережа в этом турнире между собой.
8. Шестеро ребят во дворе большого дома часто играли в лапту «трое на трое». Однажды один из мальчиков уехал, и наши друзья остались впятером. Стали играть вдвоем против троих. А чтобы никому не было обидно, стали составлять команды всеми возможными способами. Сколько различных команд по три участника и сколько – по два участника можно составить из пяти человек?
9. В первой подгруппе 10 физико-математического класса Лицея ИГУ 12 человек (включая старосту, Володю Ш.). Из них решено выбрать пять человек – делегацию в лицей № 2. Сколькими способами это можно сделать?
10. Докажите, что

   а) $C_n^k = C_n^{n-k}$,

   б) $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$.

11 класс

1. Основная теорема арифметики

Пусть дано число 360. На какое наименьшее простое число оно делится? Очевидно, на 2: 360 = 2 · 180. На какое наименьшее простое число делится 180? Тоже на 2: 180 = 2 · 90, так что 360 = 2 · 2 ·

90. На какое наименьшее простое число делится 90? Опять на 2: 90 = 2 · 45, так что 360 = 2 · 2 · 2 · 45. На какое наименьшее простое число делится 45? На 3: 45 = 3 · 15, так что 360 = 2 · 2 · 2 · 3 · 15. Наконец, 15 = 3 · 5, 360 = 2 · 2 · 2 · 3 · 3 · 5, и на этом начатый нами процесс останавливается: все получившиеся множители являются простыми.

Точно такую же процедуру можно проделать и для любого другого числа. Это утверждение есть знаменитая *основная теорема арифметики*.

Основная теорема арифметики. Любое натуральное число (кроме единицы) можно представить в виде произведения простых множителей, и притом единственным образом (с точностью до порядка сомножителей).

Такое произведение называется *разложением на простые множители* или *каноническим разложением*. Выше было получено каноническое разложение числа 360:

$$360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$$

или, как это обычно записывают,

$$360 = 23 \cdot 32 \cdot 5.$$

Мы видим, таким образом, что любое число состоит как бы из «кирпичиков» – простых множителей, возникающих в его каноническом разложении. Простое число состоит из одного такого «кирпичика» – самого себя.

Каноническое разложение является мощным инструментом решения целого ряда задач. Благодаря ему перед нами открывается вся картина делителей данного числа. Так, для числа 360 = 23 · 32 · 5 мы теперь можем сразу сказать, что оно делится, например, на 23 = 8, на 22 · 3 = 12, на 2 · 32 · 5 = 90 (так как эти числа «сконструированы» из отдельных элементов канонического разложения) и не делится, скажем, на 7 и на 33 = 3 · 11 (так как ни 7, ни 11 не входят в каноническое разложение).

Задачи

1. Найдите каноническое разложение числа 3150. Покажите, что оно делится на 6, 14, 18, 21, 35, 42, 45. Делится ли оно на 12, 22, 26, 27?

2. Не вычисляя произведения 2013 · 15 · 77, выясните, делится ли оно на 2, 3, 9, 35, 55, 80, 6039.

3. Число A делится на 3 и 4 Следует ли отсюда, что A делится на 3 · 4 = 12?

4. Число A делится на 4 и 6 Следует ли отсюда, что A делится на 4 · 6 = 24?

5. Число 3A делится на 7 Следует ли отсюда, что A делится на 7?

6. Число 9A делится на 6 Следует ли отсюда, что A делится на 6?

7. Докажите, что произведение трёх последовательных натуральных чисел делится на 6

8. Докажите, что произведение пяти последовательных натуральных чисел делится на 120

9. Допишите к числу 523. . . три цифры так, чтобы полученное шестизначное число делилось на 7, 8 и 9 Сколько всего таких чисел существует?

10. На сколько нулей оканчивается число 100! ?

11. (*Всеросс., 2018, ШЭ, 6.1*) В доме на всех этажах во всех подъездах равное количество квартир (больше одной). Также во всех подъездах поровну этажей. При этом количество этажей больше количества квартир на этаже, но меньше, чем количество подъездов. Сколько в доме этажей, если всего квартир 715?

12. (*Математический праздник, 1999, 6.2*) Укажите пять целых положительных чисел, сумма которых равна 20, а произведение – 420.

13. (*Математический праздник, 2007, 6–7.2*) В конце четверти Вовочка выписал подряд в строчку свои текущие отметки по пению и поставил между некоторыми из них знак умножения. Произведение получившихся чисел оказалось равным 2007 Какая отметка выходит у Вовочки в четверти по пению? («Колов» учительница пения не ставит.)

14. (*Московская устная олимпиада, 2016, 6.2*) Есть четыре карточки с цифрами: 2, 0, 1, 6 Для каждого из чисел от 1 до 9 можно из этих карточек составить четырёхзначное число, которое кратно выбранному однозначному. А в каком году такое будет в следующий раз?

15. (*Московская устная олимпиада, 2015, 6.2*) Охотник рассказал приятелю, что видел в лесу волка с метровым хвостом. Тот рассказал другому приятелю, что в лесу видели волка с двухметровым хвостом. Передавая новость дальше, простые люди увеличивали длину хвоста вдвое, а творческие – втрое. В результате по телевизору сообщили о волке с хвостом длиной 864 метра. Сколько простых и сколько творческих людей «отрастили» волку хвост?

16. (*Московская устная олимпиада, 2019, 6.5, 7.4*) В финале комбинированного чемпионата мира по скалолазанию шесть спортсменок соревнуются в трёх дисциплинах. В каждой из них они распределяют между собой места с первого по шестое (дележей мест не бывает). Окончательный результат каждой спортсменки – произведение трёх занятых мест. Финальные результаты оказались такими: Янья – 5, Сол – 12, Джессика – 24, Акийо – 54, Михо – 64, Петра – 75. Как распределились места в первой дисциплине, если известно, что у Яньи она самая слабая из трех?

17. (*Математический праздник, 1995, 7.1*) Натуральное число умножили последовательно на каждую из его цифр. Получилось 1995. Найдите исходное число.

18. (*Математический праздник, 2008, 7.1*) Число умножили на сумму его цифр и получили 2008. Найдите это число.

19. (*Московская устная олимпиада, 2009, 7.1*) Юра записал четырёхзначное число. Лёня прибавил к первой цифре этого числа 1, ко второй 2, к третьей 3 и к четвёртой 4, а потом перемножил полученные суммы. У Лёни получилось 234. Какое число могло быть записано Юрой?

20. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017, 7–8.4*) Коробка с сахаром имеет форму прямоугольного параллелепипеда. В ней находится 280 кусочков сахара, каждый из которых – кубик размером 1× 1× 1 см. Найдите площадь полной поверхности коробки, если известно, что длина каждой из её сторон меньше 10 см.

21. (*Всеросс., 2018, МЭ, 7.4*) На клетчатой бумаге нарисовали большой квадрат. Его разрезали на несколько одинаковых средних квадратов. Один из средних квадратов разрезали на несколько одинаковых маленьких квадратов. Стороны всех квадратов проходят по линиям сетки. Найдите длины сторон большого, среднего и маленького квадратов, если сумма их площадей равна 154.

22. (*«Высшая проба», 2017, 7.3, 8.1*) Найти все натуральные числа n от 1 до 100 такие, что если перемножить все делители числа n (включая 1 и n), получим число n^3.

23. (*Математический праздник, 2009, 7.6*) Используя в качестве чисел любое количество монет достоинством 1, 2, 5 и 10 рублей, а также (бесплатные) скобки и знаки четырёх арифметических действий, составьте выражение со значением 2009, потратив как можно меньше денег.

24. (*Математический праздник, 1996, 7.6*) Произведение последовательных чисел от 1 до n называется n-факториал и обозначается $n!$ ($1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$). Можно ли вычеркнуть из произведения $1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 100!$ один из факториалов так, чтобы произведение оставшихся было квадратом целого числа?

25. *(«Ломоносов», 2017, 7–8.6, 9.4*) Про натуральные числа m и n известно, что $3n^3 = 5m^2$. Найдите наименьшее возможное значение $m + n$.

2. Задачи по теме «Неравенства в теории чисел»

При решении задач в теории чисел важную роль играют неравенства.

Прежде, чем переходить к решению задач, отметим два неравенства, которые постоянно используются при решении задач:

Неравенства в теории чисел

1. Пусть про натуральные числа a и b известно, что $a \vdots b$, тогда $a \geqslant b$.
2. Пусть d – наибольший общий делитель натуральных чисел a и b, $a \neq b$, тогда

$$|a-b| \geqslant d.$$

Ниже рассматривается решения нескольких задач с использованием неравенств в теории чисел.

Задача 1. Пусть a, $q \neq 1$, $p \neq 1$ — такие натуральные числа, что $ap+1 \vdots q$, $aq+1 \vdots p$. Докажите, что

$$a > pq/2(p+q).$$

Решение. Заметим, что числа p и q взаимно просты. Действительно предположим противное: у них есть общий простой делитель r. Тогда $aq+1 \vdots p \vdots r$ и $aq \vdots r$, следовательно, $1 \vdots r$. Значит, p и q взаимно просты. Тогда мы получаем, что число $ap+aq+1=ap+(aq+1)$ делится на p. Аналогично, оно делится на q. Т.к. p и q взаимно просты, то $ap+aq+1 \vdots pq$. Значит, $ap+aq+1 \geqslant pq$. Поэтому

$$a \geqslant (pq-1)/(p+q) > pq/2(p+q),$$

т.к. $pq-1 \geqslant pq/2$, действительно $pq>2$ (p и q не равны 1). Тем самым задача решена.

Задача 2. Пусть $a \neq b \in N$ и при этом $ab(a+b) \vdots (a^2+ab+b^2)$. Докажите, что $|a-b| > (ab)^{1/3}$.

Решение. Обозначим через d наибольший общий делитель чисел a и b. Ключевой идеей в это задаче является неравенство

$$|a-b| \geqslant \mathrm{d}, \text{ при } a \neq b.$$

Почему оно верно? Пусть $a=da_1$, а $b=db_1$, здесь $a_1 \neq b_1$ и взаимно просты, тогда $|a-b|=d|a_1-b_1| \geqslant d$.

Из этого неравенства следует, что нам достаточно доказать, что

$$d>(ab)^{1/3}=d^2\,(a_1b_1)^{1/3}.$$

Последнее неравенство несложно преобразуется в $d>a_1b_1$. Докажем теперь это неравенство.

По условию нам известно, что

$$ab(a+b) = d^3a_1\,b_1(a_1+b_1)⋮(a^2+ab+b^2) = d^2(a_1^2+a_1b_1+b_1^2),$$

то есть

$$da_1b_1(a_1+b_1)⋮(a_1^2+a_1b_1+b_1^2). \qquad (1)$$

Заметим, что числа a_1 и $a_1^2+a_1b_1+b_1^2$ взаимно просты, т.к. $(a_1, a_1^2+a_1b_1+b_1^2) =$ $= (a_1, \ b_1^2) = 1$, поскольку у a_1 и b_1 нет общего делителя, отличного от 1. Аналогичным образом b_1 взаимно просто с $a_1^2+a_1b_1+b_1^2$.

Покажем, что a_1+b_1 взаимно просто с $a_1^2+a_1b_1+b_1^2$. Действительно,

$$(a_1+b_1, a_1^2+a_1b_1+b_1^2) = (a_1+b_1, (a_1+b_1)^2-a_1b_1) = (a_1+b_1, a_1b_1),$$

отсюда нетрудно получаем, что если у чисел a_1+b1 и a_1b_1 был бы общий простой делитель p, то по крайней мере одно из чисел a_1 или b_1 делилось бы на него (т.к. a_1b_1 делится на p), а значит и второе из чисел a_1 или b_1 делится на p (т.к. a_1+b_1 делится на a_1+b_1), т.е. a_1 и b_1 не взаимно просты. Таким образом, получаем, что a_1+b_1 и a_1b_1 взаимно просты, а значит и a_1+b_1 взаимно просто с $a_1^2+a_1b_1+b_1^2$.

Отсюда из (1) и взаимной простоты чисел a_1b_1 $(a_1+b_1\,)$ и $(a_1^2+a_1b_1+b_1^2)$ мы заключаем (в силу основной теоремы арифметики), что $d⋮(\,a_1^2+a_1b_1+b_1^2)$, то есть $d\geqslant a_1^2+a_1b_1+b_1^2> a_1b_1$.

Тем самым, мы завершили решение задачи.