

**Министерство образования Иркутской области  
Департамент образования города Иркутска  
Муниципальное автономное общеобразовательное учреждение  
Лицей ИГУ города Иркутска  
МАОУ Лицей ИГУ г. Иркутска**

**РАССМОТРЕНО**  
на заседании методического  
объединения учителей математики  
от 29.08.2023г. протокол №1.  
Руководитель МО И.Л. Коваленок

**УТВЕРЖДЕНО**  
Приказ № 01-06-140 от  
30.08.2023 г.  
Директор Е.Ю. Кузьмина

**ПРИНЯТО**  
решением педагогического совета  
от 30.08.2023 г., протокол №1

**ID -**

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА  
ОСНОВНОГО ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**

**ID –**

**учебного курса  
«Геометрический практикум»**

**11 класс**

Срок реализации программы 1 год

Уровень сложности программы УГЛУБЛЕННЫЙ

Количество часов по программе за весь период реализации - 34

Составитель программы: Агейчик В.Н., учитель математики Лицея ИГУ

**г. Иркутск  
2023 год**

## **АННОТАЦИЯ К РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЕ учебного курса «Геометрический практикум»**

Рабочая программа «Геометрический практикум» (11 класс) разработана в соответствии с требованиями ФГОС и ФОП основного общего образования и Положением «О рабочих программах учебных предметов, учебных курсов (в том числе внеурочной деятельности), учебных модулей в соответствии с требованиями ФГОС и ФОП основного общего образования» МАОУ Лицея ИГУ г.Иркутска., утвержденного приказом директора 01-06-132 от 30.08.2023 года и является частью основной образовательной программы основного общего образования.

Рабочая программа ориентирована на целевые приоритеты, сформулированные в федеральной рабочей программе воспитания и в рабочей программе воспитания МАОУ Лицей ИГУ г. Иркутска.

Обучение математике направлено на совершенствование нравственной и коммуникативной культуры обучающегося, развитие его интеллектуальных и творческих способностей, мышления, памяти и воображения, навыков самостоятельной учебной деятельности, самообразования.

Содержание математике ориентировано также на развитие функциональной грамотности как интегративного умения человека читать, понимать тексты, использовать информацию текстов разных форматов, оценивать ее, размышлять о ней, чтобы достигать своих целей, расширять свои знания и возможности, участвовать в социальной жизни.

Изучение математике направлено на достижение следующих целей:

В направлении личностного развития: развитие логического и критического мышления, культуры речи, способностей к умственному эксперименту, интереса к математическому творчеству; формирование качеств, необходимых для адаптации в современном информационном обществе, способностей к преодолению мыслительных стереотипов.

В метапредметном направлении: формирование представлений о математике как части общечеловеческой культуры, о значимости математики в развитии цивилизации и современного общества; развитие представлений о математике как форме описания и методе познания действительности, создание условий для приобретения первоначального опыта математического моделирования.

В предметном направлении: овладение математическими знаниями и умениями, необходимыми для изучения смежных дисциплин и продолжения обучения в профильных классах Лицея ИГУ; создание фундамента для математического развития одаренных детей.

Рабочая программа учебного предмета «Геометрический практикум» входит в обязательную предметную область «Математика и информатика»

Срок реализации программы – 1 год (10 класс)

Количество учебных часов, на которые рассчитана программа – 1 час в неделю, всего 34 часа в год.

Для реализации программы используются учебники, допущенные к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования организациями, осуществляющими образовательную деятельность, приказом Минпросвещения от 21.09.2022 № 858:

Атанасян Л.С., Бутусов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др. Геометрия: 10-11 классы: Учебник для общеобразовательных учреждений: Базовый и профильный уровни – М: Просвещение,

### **Дополнительная литература:**

1. Гордин Р.К. ЕГЭ 2019. Математика. Геометрия. Планиметрия. Задача 16 (профильный уровень) / Под ред. И. В. Ященко. - М.: МЦНМО,.
2. Куланин Е.Д., Норин В. П., Федин С. Н., Шевченко Ю. А. 3000 конкурсных задач по математике. - Айрис-Пресс,
3. Осипенко Л.А., Стацевичуте Е.Э., Опорные задачи в планиметрии: методическое пособие. – Иркутск, 48 с.: ил. – (Серия «Университетский лицей»).
4. Шарыгин И.Ф. Математика. 2200 задач по геометрии для школьников и поступающих в вузы. - М.: Дрофа,

Электронные образовательные ресурсы, допущенные к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования приказом Минпросвещения от 02.08.2022 № 653:

1. <http://katalog.iot.ru> - каталог образовательных ресурсов сети Интернет;

2. <http://www.edu.ru> - Федеральный образовательный портал;
3. <http://school-collection.edu.ru> - единая коллекция цифровых образовательных ресурсов;
4. <http://window.edu.ru> - единое окно доступа к образовательным ресурсам;
5. Тестирование online: 5 - 11 классы :<http://www.kokch.kts.ru/cdo/>
6. Педагогическая мастерская, уроки в Интернет и многое другое: <http://teacher.fio.ru>
7. Новые технологии в образовании: <http://edu.secna.ru/main/>
8. Путеводитель «В мире науки» для школьников:<http://www.uic.ssu.samara.ru/~nauka/>
9. Мегаэнциклопедия Кирилла и Мефодия: <http://mega.km.ru>
10. сайты «Энциклопедий», например:<http://www.rubricon.ru/> <http://www.encyclopedia.ru/>

В программу включены содержание, планируемые результаты (личностные, метапредметные, предметные), тематическое планирование с учетом рабочей программы воспитания и возможностью использования электронных (цифровых) образовательных ресурсов, оценочные и методические материалы.

Рабочая программа рассмотрена на заседании методического объединения учителей-предметников (протокол №1 от 29.08.2023 г.), согласована с заместителем директора МАОУ Лицей ИГУ г. Иркутска, утверждена приказом директора № 01-06-140 от 30.08.2023 г.

## Содержание программы курса «Геометрический практикум»

(реализуется в 11 информационно-математическом, лингво-математическом,  
экономико-математическом и физико-математическом классах)

- I. Пропорциональные отрезки и подобные треугольники (9 часов).** Отношение отрезков. Применение теоремы Фалеса. Теорема Менелая. Отношение площадей. Пропорциональные отрезки в круге. Вспомогательные подобные треугольники
- II. Применение метода координат для решения задач планиметрии (7 часов).** Различные виды уравнений прямой на плоскости. Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости. Решение задач из курса планиметрии методом координат
- III. Решение задач на доказательство и вычисление (18 часов).** Особые линии и точки в треугольнике. Окружности, связанные с треугольниками. Вписанные и описанные четырехугольники. Касающиеся и пересекающиеся окружности Углы, связанные с окружностью. Вспомогательная окружность.

### *Тематическое планирование*

Номер урока	Наименование разделов и тем уроков	Кол-во часов	Контроль
	<b>Пропорциональные отрезки и подобные треугольники</b>	9	
1	Отношение отрезков. Применение теоремы Фалеса.	1	
2	Отношение отрезков. Теорема Менелая.	1	
3	Отношение отрезков. Теорема Менелая.	1	
4	Отношение площадей.	1	
5	Отношение площадей.	1	
6	Пропорциональные отрезки в круге.	1	
7	Пропорциональные отрезки в круге.	1	
8	Вспомогательные подобные треугольники	1	
9	Вспомогательные подобные треугольники	1	
	<b>Применение метода координат для решения задач планиметрии</b>	7	
10	Различные виды уравнений прямой на плоскости.	1	
11	Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости.	1	
12	Решение задач из курса планиметрии методом координат	1	
13	Решение задач из курса планиметрии методом координат	1	
14	Решение задач из курса планиметрии методом координат	1	
15	Контрольная работа №1		1
16	Работа над ошибками	1	
	<b>Решение задач на доказательство и вычисление</b>	18	
17	Особые линии и точки в треугольнике	1	
18	Особые линии и точки в треугольнике	1	
19	Особые линии и точки в треугольнике	1	

20	Окружности, связанные с треугольниками.	1	
21	Окружности, связанные с треугольниками.	1	
22	Окружности, связанные с треугольниками.	1	
23	Вписанные и описанные четырехугольники.	1	
24	Вписанные и описанные четырехугольники.	1	
25	Вписанные и описанные четырехугольники.	1	
26	Касающиеся и пересекающиеся окружности.	1	
27	Касающиеся и пересекающиеся окружности.	1	
28	Касающиеся и пересекающиеся окружности.	1	
29	Углы, связанные с окружностью. Вспомогательная окружностью	1	
30	Углы, связанные с окружностью. Вспомогательная окружность.	1	
31	Решение задач.	1	
32	Контрольная работа №2		1
33	Решение задач ЕГЭ	1	
34	Решение задач ЕГЭ	1	

## Планируемые результаты

**Личностные результаты** освоения программы по математике характеризуются в части:

**1) патриотического воспитания:**

проявлением интереса к прошлому и настоящему российской математики, ценностным отношением к достижениям российских математиков и российской математической школы, к использованию этих достижений в других науках и прикладных сферах;

**2) гражданского и духовно-нравственного воспитания:**

готовностью к выполнению обязанностей гражданина и реализации его прав, представлением о математических основах функционирования различных структур, явлений, процедур гражданского общества (например, выборы, опросы), готовностью к обсуждению этических проблем, связанных с практическим применением достижений науки, осознанием важности морально-этических принципов в деятельности учёного;

**3) трудового воспитания:**

установкой на активное участие в решении практических задач математической направленности, осознанием важности математического образования на протяжении всей жизни для успешной профессиональной деятельности и развитием необходимых умений, осознанным выбором и построением индивидуальной траектории образования и жизненных планов с учётом личных интересов и общественных потребностей;

**4) эстетического воспитания:**

способностью к эмоциональному и эстетическому восприятию математических объектов, задач, решений, рассуждений, умению видеть математические закономерности в искусстве;

**5) ценностей научного познания:**

ориентацией в деятельности на современную систему научных представлений об основных закономерностях развития человека, природы и общества, пониманием математической науки как сферы человеческой деятельности, этапов её развития и значимости для развития цивилизации, овладением языком математики и математической культурой как средством познания мира, овладением навыками исследовательской деятельности;

**6) физического воспитания, формирования культуры здоровья и эмоционального благополучия:**

готовностью применять математические знания в интересах своего здоровья, ведения здорового образа жизни (здоровое питание, сбалансированный режим занятий и отдыха, регулярная

физическая активность), сформированностью навыка рефлексии, признанием своего права на ошибку и такого же права другого человека;

#### **7) экологического воспитания:**

ориентацией на применение математических знаний для решения задач в области сохранности окружающей среды, планирования поступков и оценки их возможных последствий для окружающей среды, осознанием глобального характера экологических проблем и путей их решения;

#### **8) адаптации к изменяющимся условиям социальной и природной среды:**

готовностью к действиям в условиях неопределённости, повышению уровня своей компетентности через практическую деятельность, в том числе умение учиться у других людей, приобретать в совместной деятельности новые знания, навыки и компетенции из опыта других;

необходимостью в формировании новых знаний, формулировать идеи, понятия, гипотезы об объектах и явлениях, в том числе ранее неизвестных, осознавать дефициты собственных знаний и компетентностей, планировать своё развитие;

способностью осознавать стрессовую ситуацию, воспринимать стрессовую ситуацию как вызов, требующий контрмер, корректировать принимаемые решения и действия, формулировать и оценивать риски и последствия, формировать опыт.

### **Личностные результаты**

– ориентация обучающихся на достижение личного счастья, реализацию позитивных жизненных перспектив, инициативность, креативность, готовность и способность к личностному самоопределению, способность ставить цели и строить жизненные планы;

– развитие компетенций сотрудничества со сверстниками, детьми младшего возраста, взрослыми в образовательной, учебно-исследовательской, проектной и других видах деятельности.

– готовность и способность к образованию, в том числе самообразованию, на протяжении всей жизни; сознательное отношение к непрерывному образованию как условию успешной профессиональной и общественной деятельности;

– осознанный выбор будущей профессии как путь и способ реализации собственных жизненных планов;

### **Метапредметные результаты**

#### ***Регулятивные универсальные учебные действия***

##### **Выпускник научится:**

– самостоятельно определять цели, задавать параметры и критерии, по которым можно определить, что цель достигнута;

– ставить и формулировать собственные задачи в образовательной деятельности и жизненных ситуациях;

– оценивать ресурсы, в том числе время и другие нематериальные ресурсы, необходимые для достижения поставленной цели;

– выбирать путь достижения цели, планировать решение поставленных задач, оптимизируя материальные и нематериальные затраты;

– организовывать эффективный поиск ресурсов, необходимых для достижения поставленной цели;

– сопоставлять полученный результат деятельности с поставленной заранее целью.

#### ***Познавательные универсальные учебные действия***

##### **Выпускник научится:**

– искать и находить обобщенные способы решения задач, в том числе, осуществлять развернутый информационный поиск и ставить на его основе новые (учебные и познавательные) задачи;

– критически оценивать и интерпретировать информацию с разных позиций, распознавать и фиксировать противоречия в информационных источниках;

– использовать различные модельно-схематические средства для представления существенных связей и отношений, а также противоречий, выявленных в информационных источниках;

– находить и приводить критические аргументы в отношении действий и суждений другого; спокойно и разумно относиться к критическим замечаниям в отношении собственного суждения, рассматривать их как ресурс собственного развития;

- выходить за рамки учебного предмета и осуществлять целенаправленный поиск возможностей для широкого переноса средств и способов действия;
- выстраивать индивидуальную образовательную траекторию, учитывая ограничения со стороны других участников и ресурсные ограничения;
- менять и удерживать разные позиции в познавательной деятельности.

### **Коммуникативные универсальные учебные действия**

#### **Выпускник научится:**

- осуществлять деловую коммуникацию как со сверстниками, так и со взрослыми (как внутри образовательной организации, так и за ее пределами), подбирать партнеров для деловой коммуникации исходя из соображений результативности взаимодействия, а не личных симпатий;
- при осуществлении групповой работы быть как руководителем, так и членом команды в разных ролях (генератор идей, критик, исполнитель, выступающий, эксперт и т.д.);
- координировать и выполнять работу в условиях реального, виртуального и комбинированного взаимодействия;
- развернуто, логично и точно излагать свою точку зрения с использованием адекватных (устных и письменных) языковых средств;
- распознавать конфликтогенные ситуации и предотвращать конфликты до их активной фазы, выстраивать деловую и образовательную коммуникацию, избегая личностных оценочных суждений.

#### **Предметные результаты:**

##### *Выпускник научится:*

- владеть геометрическими понятиями при решении задач и проведении математических рассуждений;
- самостоятельно формулировать определения геометрических фигур, выдвигать гипотезы о новых свойствах и признаках геометрических фигур и обосновывать или опровергать их, обобщать или конкретизировать результаты на новых классах фигур, проводить в несложных случаях классификацию фигур по различным основаниям;
- исследовать чертежи, включая комбинации фигур, извлекать, интерпретировать и преобразовывать информацию, представленную на чертежах;
- решать задачи геометрического содержания, в том числе в ситуациях, когда алгоритм решения не следует явно из условия, выполнять необходимые для решения задачи дополнительные построения, исследовать возможность применения теорем и формул для решения задач;
- уметь формулировать и доказывать геометрические утверждения;
- применять метод координат при решении задач

##### *В повседневной жизни и при изучении других предметов:*

составлять с использованием свойств геометрических фигур математические модели для решения задач практического характера и задач из смежных дисциплин, исследовать полученные модели и интерпретировать результат

##### *Выпускник получит возможность научиться:*

- свободно оперировать геометрическими понятиями при решении задач и проведении математических рассуждений;
- выдвигать гипотезы о новых свойствах и признаках геометрических фигур и обосновывать или опровергать их, обобщать или конкретизировать результаты на новые классы фигур.

## **УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЛИТЕРАТУРА**

### **Основная, для учащихся**

Атанасян Л.С., Бутусов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др. Геометрия: 10-11 классы: Учебник для общеобразовательных учреждений: Базовый и профильный уровни – М: Просвещение,

### **Дополнительная литература:**

5. Гордин Р.К. ЕГЭ 2019. Математика. Геометрия. Планиметрия. Задача 16 (профильный уровень) / Под ред. И. В. Яценко. - М.: МЦНМО,.
6. Куланин Е.Д., Норин В. П., Федин С. Н., Шевченко Ю. А. 3000 конкурсных задач по математике. - Айрис-Пресс,

- Осипенко Л.А., Стацевичуте Е.Э., Опорные задачи в планиметрии: методическое пособие. – Иркутск, 48 с.: ил. – (Серия «Университетский лицей»).
- Шарыгин И.Ф. Математика. 2200 задач по геометрии для школьников и поступающих в вузы. – М.: Дрофа,

**Электронные образовательные ресурсы**, допущенные к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования приказом Минпросвещения от 02.08.2022 № 653:

- <http://katalog.iot.ru> - каталог образовательных ресурсов сети Интернет;
- <http://www.edu.ru> - Федеральный образовательный портал;
- <http://school-collection.edu.ru> - единая коллекция цифровых образовательных ресурсов;
- <http://window.edu.ru> - единое окно доступа к образовательным ресурсам;
- Тестирование online: 5 - 11 классы :<http://www.kokch.kts.ru/cdo/>
- Педагогическая мастерская, уроки в Интернет и многое другое: <http://teacher.fio.ru>
- Новые технологии в образовании: <http://edu.secna.ru/main/>
- Путеводитель «В мире науки» для школьников:<http://www.uic.ssu.samara.ru/~nauka/>
- Мегаэнциклопедия Кирилла и Мефодия: <http://mega.km.ru>
- сайты «Энциклопедий», например:<http://www.rubricon.ru/> <http://www.encyclopedia.ru/>

В программу включены содержание, планируемые результаты (личностные, метапредметные, предметные), тематическое планирование с учетом рабочей программы воспитания и возможностью использования электронных (цифровых) образовательных ресурсов, оценочные и методические материалы.

Рабочая программа рассмотрена на заседании методического объединения учителей-предметников (протокол №1 от 29.08.2023 г.), согласована с заместителем директора МАОУ Лицей ИГУ г. Иркутска, утверждена приказом директора № 01-06-140 от 30.08.2023 г.

–

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

### Оценочные материалы

#### Контрольная работа №1

- В треугольнике  $ABC$  точка  $E$  принадлежит медиане  $BM$ , причем  $BE=3EM$ . Прямая  $AE$  пересекает сторону  $BC$  в точке  $K$ . Найдите отношение площадей треугольников  $AKC$  и  $ABC$ .
- Решите задачу методом координат: На катете  $BC$  прямоугольного треугольника  $ABC$  с прямым углом при вершине  $C$  и углом  $30$  градусов при вершине  $A$  вне треугольника построен равносторонний треугольник  $BKD$ . Прямая  $AD$  пересекает сторону  $BC$  в точке  $K$ . а) Докажите, что  $CK:KB=1:2$ . б) Прямая, проходящая через точку  $K$  перпендикулярно  $CD$ , пересекает гипотенузу  $AB$  в точке  $M$ . Найдите отношение  $AM:MB$ .

#### Контрольная работа №2

- В треугольнике  $ABC$  биссектриса  $BE$  и медиана  $AD$  перпендикулярны. а) Докажите, что  $CE=2AE$ . б) Найдите стороны треугольника  $ABC$ , если  $BE=AD=8$ .
- В параллелограмме лежат две окружности, касающиеся друг друга и трёх сторон параллелограмма каждая. а) Докажите, что одна из сторон параллелограмма видна из центра одной из окружностей под прямым углом. б) Найдите площадь параллелограмма, если радиус одной из окружностей равен  $2$ , а один из отрезков стороны параллелограмма от вершины до точки касания с одной из окружностей равен  $4$ .

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

### МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ



## 1. Внеписанная окружность. Опорные задачи

*Внеписанной окружностью* называется окружность, касающаяся одной из сторон треугольника и продолжений двух других сторон. Центром внеписанной окружности является точка пересечения биссектрис внешних углов и биссектрисы внутреннего угла треугольника при третьей вершине.

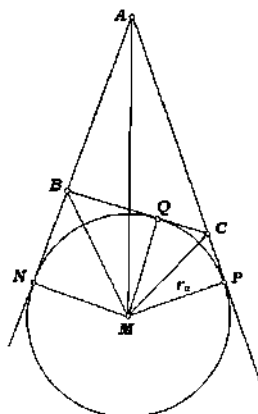


Рис. 1

**Задача 1.** Вычислите радиус внеписанной окружности, если известны площадь, полупериметр и сторона треугольника, которой касается эта окружность.

*Решение.* Пусть дан треугольник  $ABC$ , где  $BC=a$ ,  $AC=b$  и  $AB=c$ . Точка  $M$  – центр внеписанной окружности, касающейся стороны  $a$ . Обозначим радиус внеписанной окружности через  $r_a$ . Чтобы вычислить радиус внеписанной окружности рассмотрим площади треугольников  $ABC$ ,  $ABM$ ,  $ACM$ ,  $BCM$  (рис.1). Тогда

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= S_{ABM} + S_{ACM} - S_{BCM} = \frac{cr_a}{2} + \frac{br_a}{2} - \frac{ar_a}{2} = \\ &= \frac{r_a(b+c-a)}{2} = r_a(p-a), \end{aligned}$$

где  $p$  – полупериметр треугольника  $ABC$ . Следовательно,  $r_a = \frac{S}{p-a}$

$$\text{Аналогично доказывается, что } r_b = \frac{S}{p-b}; r_c = \frac{S}{p-c}.$$

**Задача 2.** Докажите, что отрезок от вершины треугольника до точки касания внеписанной окружности, расположенной на продолжении стороны, равен полупериметру.

*Решение.* Пусть дан треугольник  $ABC$ , где  $BC=a$ ,  $AC=b$  и  $AB=c$ ,  $N$  и  $P$  – точки касания внеписанной окружности с продолжениями сторон  $AB$  и  $AC$  (рис. 1). Тогда  $AN=AB+BN=c+BQ$ ;  $AP=AC+CP=b+QC$  ( $BN=BQ$ ,  $CP=QC$ , как отрезки касательных, проведенных из одной точки). Так как  $AN=AP$ , то  $2AN=b+c+BQ+QC=b+c+a=2p$ . Следовательно,  $AN=p$ . Что и требовалось доказать.

**Задача 3.** Вписанная окружность треугольника  $ABC$  касается стороны  $BC$  в точке  $K$ , а внеписанная – в точке  $L$ . Докажите, что  $CK=BL=(a+b-c)/2$ , где  $a$ ,  $b$ ,  $c$  – длины сторон треугольника.

*Решение.* Пусть  $M$  и  $N$  – точки касания вписанной окружности со сторонами  $AB$  и  $AC$  (рис. 2).

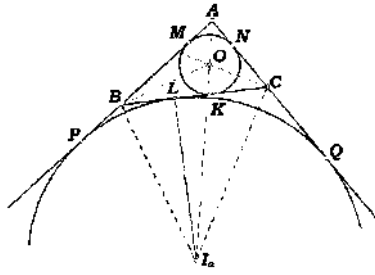


Рис. 2

Тогда  $BK+AN=BM+AM=AB$ , поэтому  $CK+CN=a+b-c$ . Пусть  $P$  и  $Q$  – точки касания вневписанной окружности с продолжениями сторон  $AB$  и  $AC$  (рис. 2). Тогда  $AP=AB+BP=AB+BL$  и  $AQ=AC+CQ=AC+CL$ . Поэтому  $AP+AQ=a+b+c$ . Следовательно,  $BL=BP=AP-AB=(a+b-c)/2$ .

**Точка Нагеля.** Прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания соответственных вневписанных окружностей, пересекаются в одной точке, называемой точкой Нагеля (рис.3).

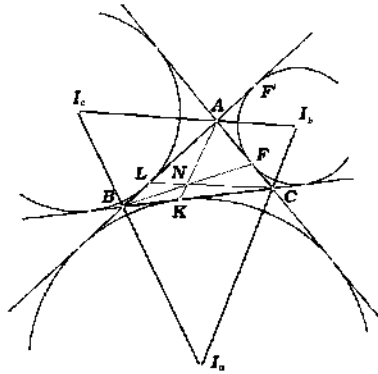


Рис. 3

*Доказательство.* Так как  $AF=AF'=BF'-BA=p-c$ ,  $CK=p-b$ ,  $BL=p-a$ ,  $FC=p-a$ ,  $KB=p-c$ ,  $LA=p-b$ , то  $\frac{AF}{FC} \cdot \frac{CK}{KB} \cdot \frac{BL}{LA} = 1$  (по теореме Чебы). Следовательно, прямые  $AK$ ,  $BF$  и  $CL$  пересекаются в одной точке.

**Задача 4.** Доказать, что  $AP=BR$ ,  $AN=CS$  и  $OB=CQ$ , где  $O, R, P, N, Q, S$  – точки касания вневписанных окружностей с продолжениями сторон треугольника  $ABC$  (рис. 4).

*Решение.*

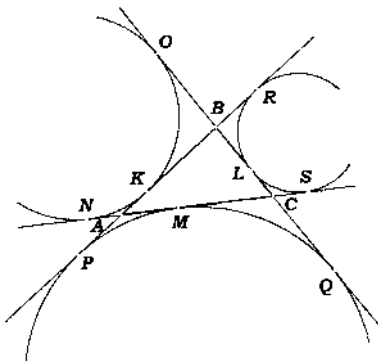


Рис. 4

Заметим, что  $NA=AK$ ,  $AP=AM$ ,  $CM=CQ$ ,  $CS=CL$ ,  $BL=BR$ ,  $BK=OB$  (как отрезки касательных, проведенных из одной точки).  $PA+AK+KB=BL+LC+CQ$  и  $AK+KB+BR=AM+MC+CS$   
Или  $AP+AK+KB=BL+LC+CQ$  и  $AK+KB+BR=AM+CL+CQ$ .  
Вычтем из первого равенства второе. Получим:  $AP-BR=BL-AM$  или  $AP-BR=BR-AP$ . Следовательно,  $AP=BR$ . Аналогично доказывается, что  $AN=CS$  и  $OB=CQ$ .

## 2. Задачи по теме «Пропорциональные отрезки в круге»

1. Через точку  $A$ , удалённую на расстояние, равное 7, от центра окружности радиуса 11, проведена хорда, равная 18. Найдите отрезки, на которые хорда делится точкой  $A$ .
2. Радиусы двух concentрических окружностей относятся как 1 : 2. Хорда большей окружности делится меньшей окружностью на три равные части. Найдите отношение этой хорды к диаметру большей окружности.
3. Точка  $M$  лежит внутри окружности радиуса  $R$  и удалена от центра на расстояние  $d$ . Докажите, что для любой хорды  $AB$  этой окружности, проходящей через точку  $M$ , произведение  $AM \cdot MB$  одно и то же. Чему оно равно?
4. Точка  $M$  лежит вне окружности радиуса  $R$  и удалена от центра на расстояние  $d$ . Докажите, что для любой прямой, проходящей через точку  $M$  и пересекающей окружность в точках  $A$  и  $B$ , произведение  $AM \cdot MB$  одно и то же. Чему оно равно?
5. В квадрат  $ABCD$  со стороной  $a$  вписана окружность, которая касается стороны  $CD$  в точке  $E$ . Найдите величину хорды, соединяющей точки, в которых окружность пересекается с прямой  $AE$ .
6. Из точки  $A$ , лежащей вне окружности, проведены к окружности касательная и секущая. Расстояние от точки  $A$  до точки касания равно 16, а расстояние от точки  $A$  до одной из точек пересечения секущей с окружностью равно 32. Найдите радиус окружности, если расстояние от центра окружности до секущей равно 5.
7. В круге проведены две хорды  $AB$  и  $CD$ , пересекающиеся в точке  $M$ ,  $K$  — точка пересечения биссектрисы угла  $BMD$  с хордой  $BD$ . Найдите отрезки  $BK$  и  $KD$ , если  $BD = 3$ , а площади треугольников  $CMB$  и  $AMD$  относятся как 1 : 4.
8. Диагональ  $AC$  вписанного четырёхугольника  $ABCD$  является биссектрисой угла  $BAD$  и пересекается с диагональю  $BD$  в точке  $K$ . Найдите  $KC$ , если  $BC = 4$  и  $AK = 6$ .
9. Продолжение медианы треугольника  $ABC$ , проведённой из вершины  $A$  пересекает описанную окружность в точке  $D$ . Найдите  $BC$ , если  $AC = DC = 1$ .
10. Через вершину наибольшего угла треугольника со сторонами 6, 8, 10 проведена касательная к описанной окружности этого треугольника. Найдите отрезок касательной, заключённый между точкой касания и точкой пересечения с продолжением наибольшей стороны треугольника.

#### Задачи по теме «Применение метода координат для решения задач планиметрии»

1. Равнобедренная трапеция с основаниями 8 см и 2 см имеет острый угол  $45^\circ$ . Написать уравнения сторон трапеции, приняв за ось  $Ox$  большее основание и за ось  $Oy$  — ось симметрии трапеции.
2. Написать уравнения сторон ромба с диагоналями 10 см и 6 см, приняв большую диагональ за ось  $Ox$  и меньшую — за ось  $Oy$ .
3. Написать уравнение прямой, проходящей через точку  $(-4; 6)$  и отсекающей от осей координат треугольник площадью 6.
4. Написать уравнения прямых, проходящих через начало координат под углом  $45^\circ$  к прямой  $y = 4 - 2x$ .
5. Написать уравнения прямых, проходящих через точку  $A(-1; 1)$  под углом  $45^\circ$  к прямой  $2x + 3y = 6$ .
6. Две стороны параллелограмма заданы уравнениями  $y = x - 2$  и  $5y = x + 6$ . Диагонали его пересекаются в начале координат. Написать уравнения двух других сторон параллелограмма и его диагоналей.
7. Вне прямоугольного треугольника  $ABC$  на его катетах  $AC$  и  $BC$  построены квадраты  $ACDE$  и  $BCFG$ . Продолжение медианы  $CM$  треугольника  $ABC$  пересекает прямую  $DF$  в точке  $N$ . Найти длину  $CN$ , если длины катетов равны 1 и 4.
8. На катете  $BC$  прямоугольного треугольника  $ABC$  с прямым углом при вершине  $C$  и углом  $30$  градусов при вершине  $A$  вне треугольника построен равносторонний треугольник  $BCE$ . Прямая  $AE$  пересекает сторону  $BC$  в точке  $K$ . А) Докажите, что  $CK:KB = 1:2$ . В) Прямая, проходящая через точку  $K$  перпендикулярно  $CE$ , пересекает гипотенузу  $AB$  в точке  $M$ . Найдите отношение  $AM:MB$ .

9. На гипотенузе  $AB$  прямоугольного треугольника  $ABC$  с углом  $30$  градусов при вершине  $B$  вне треугольника построен равносторонний треугольник  $ABD$ . Прямая  $CD$  пересекает сторону  $AB$  в точке  $K$ . А) Докажите, что  $AK:KB=1:2$ . В) Прямая, проходящая через точку  $K$  перпендикулярно  $AD$ , пересекает катет  $BC$  в точке  $M$ . Найдите отношение  $CM:MB$ .
10. В выпуклом четырехугольнике  $ABCD$  длина отрезка, соединяющего середины сторон  $AB$  и  $CD$ , равна  $1$ . Прямые  $BC$  и  $AD$  перпендикулярны. Найдите длину отрезка, соединяющего середины диагоналей  $AC$  и  $BD$ .